Критерии проверки.

• Полное решение или нужный пример — 7 баллов.

• если возможны 2 ситуации, описанные в задаче и верно разобрана только одна, то ставить 3 балла.

• В геометрической задаче неполное обоснование - 4 балла

• Приведён только ответ без пояснений — 0 баллов.

Четвертый класс

4.1. Ответ. 455+545=1000.
4.2. Ответ. Например, 91 и 64, 73 и 82
4.3. Ответ. Не может.
Решение. Каждую банку клубничного варенья Карлсон съедает вместе с какой-то из 5 + 8 + 10 = 23 банок другого варенья. Значит, он съест не более 23 банок клубничного варенья и все варенье съесть не сможет.
4.4. Ответ. 5 детей – 3 мальчика и 2 девочки.

Пятый класс

5.1. Ответ. 455+545=1000.
5.2. Ответ. Например, 91 и 64, 73 и 82
5.3. Ответ. Не может.
Решение. Каждую банку клубничного варенья Карлсон съедает вместе с какой-то из 5 + 8 + 10 = 23 банок другого варенья. Значит, он съест не более 23 банок клубничного варенья и все варенье съесть не сможет.
5.4. Ответ. 5 детей – 3 мальчика и 2 девочки.
5.5. В ящике 23 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 5 кг гвоздей?
Решение. При первом взвешивании на одну из чашек весов кладем гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 12 и 11 кг гвоздей. Кучку с 12 кг откладываем. При втором взвешивании берем 11 кг гвоздей. На одну из чашек весов кладем гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 6 и 5 кг гвоздей.

Шестой класс

6.1. Ответ. Например, скобки можно расставить так: (7 – 6) – (5 – 4) – (3 – 2 – 1) = 0.
6.2. Ответ. Например: 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1.
6.3. Ответ. Например, возможны такие последовательности переливаний: $\{0, 0, 20\}\to$

{0, 5, 15}→ {3, 2, 15}→ {0, 2, 18}→ {2, 0, 18} → {2, 5, 13}→ {3, 4, 13);
либо {0, 0, 20}→ {3, 0, 17}→ {0, 3, 17}→ {3, 3, 14}→ {1, 5, 14}→{1, 0, 19}→ {0, 1, 19}→ {3, 1, 16}→ {0, 4, 16}.

6.4.

Решение. Два возможных примера приведены на рис. 1. Существуют и другие примеры.

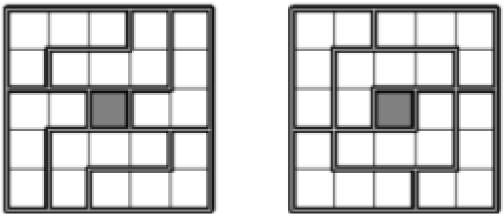

Рис. 1

6.5. Ответ. 3 кг.

Решение. На сумму 3 + 5 = 8 кг сдвиг стрелки влияет дважды, а на вес 7 кг – только один раз. Поэтому сдвиг стрелки равен 8 – 7 = 1 кг. Следовательно, правильный вес на 1 кг меньше, чем показывают весы. Значит, если на весы поставить гирю в 2 кг, то они покажут 3 кг.

Седьмой класс

7.1. Ответ. 1.

Решение. Так как среди любых двух ручек есть синяя, то двух красных ручек в пенале быть не может. А одна красная ручка в пенале есть. Поэтому в пенале лежит 1 красная и 9 синих ручек.

7.2. Ответ. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 10.

7.3. Решение. Два возможных варианта показаны на рис. 2.

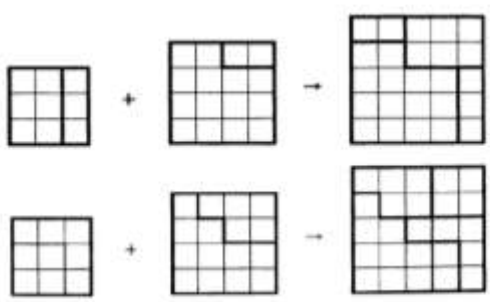

Рис. 2

7.4. Ответ. На 19 метров.

Решение. Скорость *B* составляет 0.9 от скорости *A*, а скорость *C* составляет 0.9 от скорости *B*, т.е. 0.81 от скорости *A*.

7.5. Ответ. 6.

Решение. Заметим сначала, что на последнюю цифру произведения влияют только последние цифры сомножителей. Поэтому наше произведение имеет ту же последнюю цифру, что и произведение 9· 1· 2· 3· 4· 6 ·7· 8· 9· 1· 2 ·3 ·4· 6· 7· 8… Рассмотрим произведение 9 1 2 3 4 6 7 8. Оно оканчивается на 6, т.е. наше произведение оканчивается на ту же цифру, что и произведение 6· 6· 6· 6… Но из того, что 6· 6 оканчивается на 6, следует, что наше произведение оканчивается на 6.

Восьмой класс

8.1. Ответ. Указательный.

Решение. На большой палец приходится счет 1, 9, 17, 25, …, 2017, так как $2017 = 8 \cdot 252+1$.

8.2. Решение. Сложив два данных равенства, получим $a+3b+2c=3c+3a$, откуда $c+2a=3b$.

Замечание. Решая систему методом подстановки получим: $a = b = c$, откуда также следует доказываемое равенство.

8.3. Ответ. Например: 99111..

8.4. Ответ. Не может.

Решение. Число ягод на двух соседних кустах отличается на 1, поэтому на двух соседних кустах вместе нечетное число ягод. Тогда количество ягод на восьми кустах равно сумме четырех нечетных чисел, т. е. числу четному. Значит, на всех кустах вместе не может быть 225 ягод.

8.5.

Решение. Треугольники *ACG* и *BEF* равны (по стороне и двум углам, прилежащим к ней) (см. рис. 4). Следовательно, треугольники *AGC и BFE* и *AG* = *BF*. По теореме о смежных углах углы *FGD* и *GFD* равны. Поэтому треугольник *GFD* равнобедренный (*GD* = *FD*). Следовательно, *AG* + *GD* = *BF* + *FD*, т. е. *AD* = *BD*.

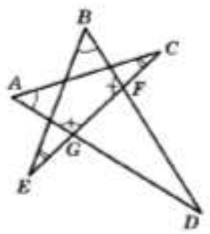

Рис. 4.

Девятый класс

9.1. Ответ. $a+b=1$.

Решение. Решение: уравнение можно преобразовать к виду $(a-b)(a+b-1)=0$. А так как $a\neq b$, то $a+b-1=0$, откуда $a+b=1$.

9.2. Ответ. в 12^{00}.

Решение. За 1 час от 16^{00} до 17^{00} поезд проехал 0,25 пути с момента выезда до 16^{00}. Значит, он ехал 4 часа и выехал в 12^{00}.

9.3. Ответ. 21234.

Решение. Пусть n – среднее из данных чисел. Тогда их сумма $S=(n-1)+n+(n+1)=3n$ делится на 3. То есть число $s=\overline{a_1a_2\ldots.a_k1234}$ делится на 3. Наименьшим подходящим числом будет 21234.

9.4. Ответ. $\angle ABC = 90°$.

Решение. Пусть точка *D* – середина стороны *AC* (см. рис. 5). Тогда *AD* = *AC/*2 = *AB*. Значит, треугольники *ABE* и *ADE* равны (сторона *AE* – общая, ∠*BAE* = ∠*CAE*). Тогда ∠*ABC*= ∠*ADE* = 90°, так как *ED* – медиана равнобедренного треугольника *AEC* (*AE*=*EC* – по условию) и, значит, его высота.

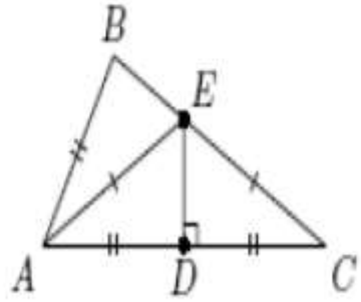

Рис. 5

9.5. Ответ. 4.
Решение. График касается оси Ox, поэтому дискриминант трехчлена равен нулю: $D = a^2 - 4a = 0$. Отсюда $a = 0$ или $a = 4$. Но из графика следует, что $a \neq 0$. (Нарисован график трехчлена $y = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$).

Десятый класс

10.1. Ответ. Например: 11…10 (сто единиц).
10.2. Ответ. На 1.
Решение. Пусть m и n – соответственно количество мальчиков и девочек, а x и y – соответственно цена пирожка и булочки. Тогда, по условию, $mx + ny + 1 = my + nx$. Отсюда $(x - y)(n - m) = 1$. Но произведение натурального числа на целое равно 1, только если оба множителя равны 1.
10.3. Ответ. 81020304.
Решение. Пусть n – среднее из данных чисел. Тогда их сумма $S = (n - 4) + (n - 3) + (n - 2) + \ldots + (n + 4) = 9n$ делится на 9. То есть число $s = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k 1020304}$ делится на 9. Наименьшим подходящим числом будет 81020304.
10.4. Ответ. 1881.
Решение. Заметим, что произведение двух чисел будет нечетным, если оба сомножителя нечетны, и четным в остальных случаях. Всего в таблице записано $(75 - 10 + 1)(48 - 11 + 1) = 2508$ произведений. Заметим, что среди чисел от 10 до 75 будет 33 нечетных числа, а среди чисел от 11 до 48 – 19 нечетных чисел. Поэтому в таблице будет $33 \cdot 19 = 627$ нечетных произведений. Остальные $2508 - 627 = 1881$ будут четными.
10.5. Решение. По свойству биссектрисы треугольника $BE : EA = BD : DA = BD : DC = BF : FC$. Отсюда следует, что $EF \parallel AC$.

Одиннадцатый класс

11.1. Ответ. Например, $(x^2 + 1) + (x^2 - x + 1) = 2x^2 - x + 2$
11.2. Ответ. 9 м/с и 8 м/с.
Решение. Пусть скорости велосипедистов равны x м/с и y м/с ($x > y$). Тогда $10(x + y) = 170$ и $170(x - y) = 170$. Отсюда находим $x = 9$ м/с и $y = 8$ м/с.
11.3. Ответ. 810.
Решение. Число однозначно определяется первой (от 1 до 9), второй (от 0 до 9) и третьей (от 0 до 8) цифрами. Всего получается $9 \cdot 10 \cdot 9 = 810$ вариантов.
11.4.
Решение. Из того, что $MN \| BC$ следует, что $BM : AM = CN : AN$. По свойству биссектрис $BS : AS = BM : AM$ и $CS : AS = CN : AN$. Отсюда $BS : AS = CS : AS$. Значит, $BS = CS$, что и требовалось.
11.5. Ответ. 40.

Решение. Так как все карточки в итоге оказались перевернуты, то каждую из них переворачивали либо 1 раз, либо 3 раза. Всего было сделано 180 переворачиваний: 100 из них потребовалось, чтобы перевернуть каждую карточку 1 раз; остальные 80 – чтобы какие-то карточки перевернуть еще по 2 раза. Значит, по 3 раза перевернули 40 карточек.